Mécanique des Fluides Compressibles

Equations fondamentales

Semestre printemps 2024-2025

Ecoulement compressible 3D

- <u>5 champs inconnus</u>
  - Pression: p
  - Vitesse: $\mathbf{u}$
  - Masse volumique: ρ
- <u>5 équations de conservation</u>
  - Conservation de la masse
  - Conservation de la qtité de mvt
  - *Conservation de l'énergie*

⇨ 2 champs inconnus supplémentaires

- Energie interne : e
- Température : T

Ecoulement incompressible 3D

- <u>4 champs inconnus</u>
  - Pression: p
  - Vitesse: $\mathbf{u}$
- <u>4 équations de conservation</u>
  - Conservation de la masse
  - Conservation de la qtité de mvt

⇨ 2 équations constitutives

- Equation d'état
- Relation thermodynamique

➢ Formulation intégrale

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \, dV}_{\text{variation temporelle de } \rho \text{ à l'intérieur de } V} + \overbrace{\int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\rho \mathbf{u}\right)}^{\text{débit de } \rho \text{ à travers } S} \, dS = 0$$

➢ A l'aide du théorème de la divergence

$$\int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{Q} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbb{Q} \, dV$$

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0$$

➢ Formulation différentielle

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0}$$

- En développant:

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{u}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho\right] + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0$$

- Dérivée matérielle / totale

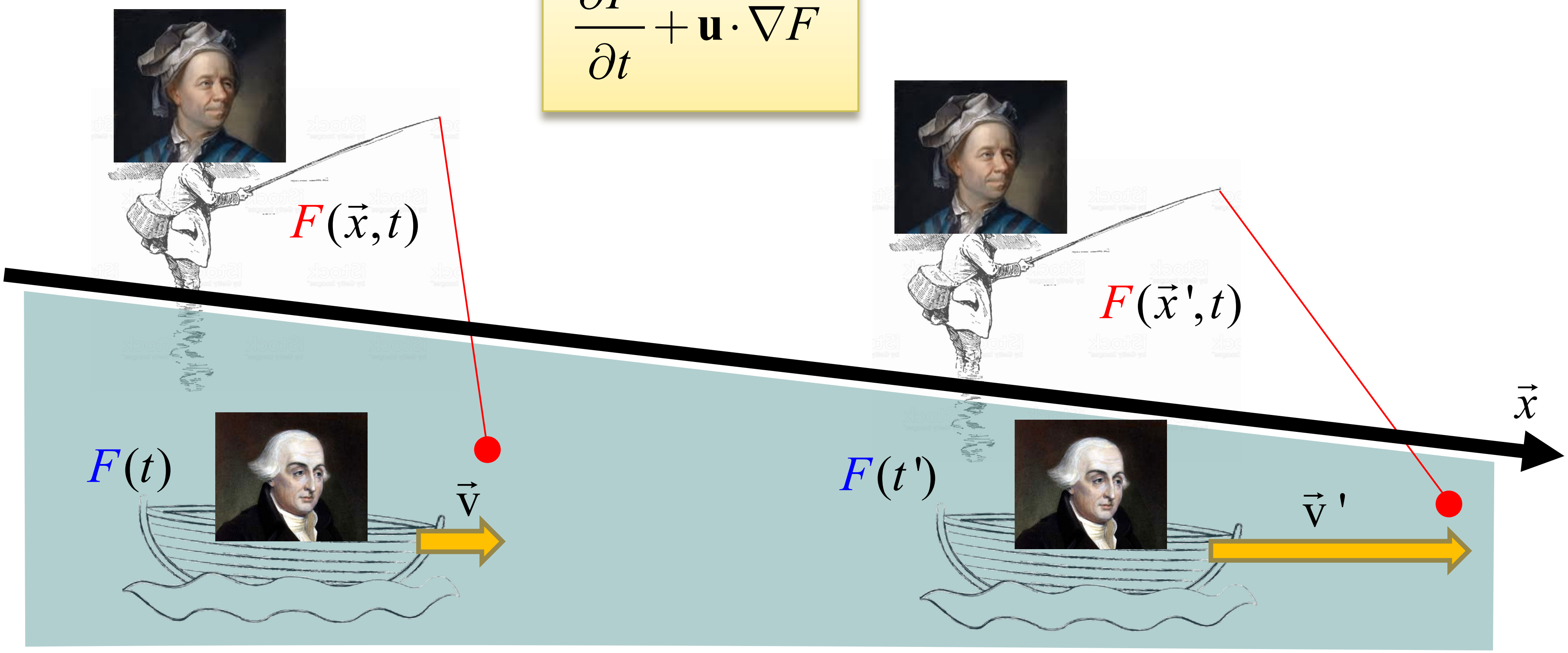
$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla F$$

- Formulation différentielle

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0}$$

Euler

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F$$



Lagrange

$$\frac{DF}{Dt}$$

- Formulation intégrale

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\mathbf{u}\;dV}_{\text{variation temporelle de } \rho\boldsymbol{u} \text{ à l'intérieur de } V} + \overbrace{\int_S \rho\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{uu})\;dS}^{\text{flux de } \rho\mathbf{u} \text{ à travers S}} = \overbrace{\int_S \hat{\mathbf{n}}\cdot\Sigma\;dS + \int_V \rho\mathbf{f}\;dV}^{\text{somme des forces surfaciques et volumiques}}$$

Tenseur de contraintes

Pression

$$\Sigma = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}$$

Tenseur de contraintes visqueuses

$$\nabla\cdot\Sigma = -\nabla p + \nabla\cdot\mathbf{T}$$

- Pour les fluides parfaits, le tenseur des contraintes est donné par

$$\Sigma = -p\mathbf{I}$$

- A l'aide du théorème de la divergence

$$\int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{Q} \, dS = \int_V \nabla \cdot \mathbb{Q} \, dV$$

$$\int_V \left[\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) \right] dV = \int_V \nabla \cdot \Sigma \, dV + \int_V \rho \mathbf{f} \, dV$$

$$\int_V \left[\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) \right] dV = \int_V -\nabla p \, dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} \, dV + \int_V \rho \mathbf{f} \, dV$$

- Pour les fluides parfaits (ou les écoulements sans forces visqueuses)

$$\int_V \left[\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) \right] dV = -\int_V \nabla p \, dV + \int_V \rho \mathbf{f} \, dV$$

- Formulation différentielle

$$\left[\int_V \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u})\right] dV = \int_V \nabla \cdot \Sigma \; dV + \int_V \rho \mathbf{f} \; dV$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) = \nabla \cdot \Sigma + \rho \mathbf{f}$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}$$

- Pour les fluides parfaits, la relation précédente devient:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{f}$$

Formulation d'Euler (fluide parfait ou écoulement sans forces visqueuses)

- La conservation de la quantité de mouvement pour les fluides parfaits s'écrit:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\mathbf{u})=-\nabla p+\rho\mathbf{f}$$

- En développant le membre de gauche:

$$\underbrace{\mathbf{u}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\right)}_{=0}+\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right)=-\nabla p+\rho\mathbf{f}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})=0$$

- On obtient la formulation d'Euler de la conservation de quantité de mouvement:

$$\boxed{\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt}=-\nabla p+\rho\mathbf{f}}$$

PRINCIPES GÉNÉRAUX
DU MOUVEMENT DES FLUIDES.
PAR M. EULER.

XXI. Nous n'avons donc qu'à égaler ces forces accélératrices avec les accélerations actuelles que nous venons de trouver, & nous obtiendrons les trois équations suivantes :

$$P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$Q - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$R - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

EPFL

Formulation de Lamb (fluides parfaits)

- A l'aide de la relation vectorielle

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}=\nabla\frac{u^2}{2}-\mathbf{u}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{u})=\nabla\frac{u^2}{2}-\mathbf{u}\wedge\boldsymbol{\omega}$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur tourbillon ou vorticité tel que $\boldsymbol{\omega}=\nabla\wedge\mathbf{u}$

- La formulation d'Euler devient celle de Lamb

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}=-\nabla p+\rho\mathbf{f}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}-\mathbf{u}\wedge\boldsymbol{\omega})\right)=-\frac{1}{\rho}\nabla p-\nabla\frac{u^2}{2}+\mathbf{f}}$$

Formulation de Crocco (fluides parfaits)

- Relation de Gibbs $$dh = Tds + \frac{dp}{\rho}$$

- Les différentielles totales peuvent être développées en fonction des variables spatiales:

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla h - T\,\nabla s$$

- Finalement, la relation de Lamb devient la formulation de Crocco

$$\boxed{\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u}\wedge\boldsymbol{\omega}\right) = -\nabla h_0 + T\nabla s + \mathbf{f}}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u}\wedge\boldsymbol{\omega}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\frac{u^2}{2} + \mathbf{f}$$

$$h_0 \equiv h + \frac{u^2}{2}$$ Enthalpie de **stagnation**, de **réservoir**, d'**arrêt**

Formulation de Crocco - Interprétation

- Formulation générale $$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla h_0 = \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} + T\nabla s + \mathbf{f}$$

- \+ Permanent $$\nabla h_0 = \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} + T\nabla s + \mathbf{f}$$

- \+ Force volumique nulle $$\nabla h_0 = \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} + T\nabla s$$

- \+ Isentropique $$\nabla h_0 = \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}$$

Si l'écoulement est isentropique, la vorticité entraîne une variation d'enthalpie de stagnation

- \+ Irrotationnel ou le long d'une ligne de courant $$\nabla h_0 = 0$$ $$h_0 = cst$$

L'enthalpie de stagnation est constante **dans tout l'écoulement**

- dans un écoulement **irrotationnel**
- **le long d'une ligne de courant** dans un écoulement **rotationnel**

- Formulation intégrale

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho e_0 \, dV + \int_V \nabla\cdot(\rho e_0 \mathbf{u}) dV}_{\text{somme de l'énergie contenue dans le volume V et de son flux à travers la surface de ce volume}} = \underbrace{\int_V \nabla\cdot(\Sigma\cdot\mathbf{u}) dV + \int_V \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\, dV}_{\text{travail des forces surfaciques et volumiques}} \overbrace{- \int_V \nabla\cdot\mathbf{q} dV}^{\text{transfert de chaleur}} + \underbrace{\int_V r dV}_{\text{rayonnement}}$$

$e_0 = e + \dfrac{u^2}{2}$ Energie interne de stagnation

$\mathbf{q} = -\lambda\nabla T$ Flux de chaleur λ Conductivité thermique

r Rayonnement

- Pour les fluides parfaits, on obtient:

$\Sigma = -p\mathbf{I}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho e_0 \, dV + \int_V \nabla\cdot(\rho e_0 \mathbf{u}) dV = -\int_V \nabla\cdot(p\mathbf{u}) dV + \int_V \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\, dV - \int_V \nabla\cdot\mathbf{q} dV + \int_V r dV$$

➢ Formulation différentielle

$$\rho \frac{D(e_0)}{Dt} = \frac{\partial(\rho\, e_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_0 \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + r$$

$$\rho \frac{D(e_0)}{Dt} = \frac{\partial(\rho\, e_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_0 \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + r$$

➢ Pour les fluides parfaits, on obtient:

$$\mathbf{\Sigma} = -p\mathbf{I}$$

$$\boxed{\rho \frac{D(e_0)}{Dt} = \frac{\partial(\rho\, e_0)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_0 \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + r}$$

➢ Enthalpie d'arrêt

$$h_0 = h + \frac{1}{2}u^2 = e + pv + \frac{1}{2}u^2 = e_0 + \frac{1}{\rho}p$$

$$\Rightarrow \rho e_0 = \rho h_0 - p$$

$$\rho\frac{D(e_0)}{Dt} = \frac{\partial\boxed{(\rho e_0)}}{\partial t} + \nabla\cdot(\boxed{\rho e_0}\mathbf{u}) = -\nabla\cdot(p\mathbf{u}) + \nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}) + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} - \nabla\cdot\mathbf{q} + r$$

$$\rho\frac{D(h_0)}{Dt} = \frac{\partial(\rho h_0)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho h_0\mathbf{u}) = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}) + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} - \nabla\cdot\mathbf{q} + r$$

➢ Pour les fluides parfaits, on obtient:

$$\Sigma = -p\mathbf{I}$$

$$\boxed{\rho\frac{D(h_0)}{Dt} = \frac{\partial(\rho h_0)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho h_0\mathbf{u}) = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} - \nabla\cdot\mathbf{q} + r}$$

- Energie statique et enthalpie statique

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}u^2\right) = (\nabla \cdot \Sigma)\cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}\cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}\cdot \nabla p + (\nabla \cdot \mathsf{T})\cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}\cdot \mathbf{u}$$

$$\rho \frac{D(e)}{Dt} = \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) = -p\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathsf{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + r$$

$$\rho \frac{D(h)}{Dt} = \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{u}) = \frac{Dp}{Dt} + \mathsf{T} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + r$$

où on a introduit la <u>Fonction de Dissipation Visqueuse</u> $\mathsf{T} : \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathsf{T}\cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathsf{T})\cdot \mathbf{u}$

$$\boxed{\mathsf{T} : \nabla \mathbf{u} \geq 0}$$

- Entropie

$$de = Tds - pd\upsilon$$

$$dh = Tds + \upsilon dp$$

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = T\left[\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho s\mathbf{u})\right] = \mathbf{T}:\nabla\mathbf{u} - \nabla\cdot\mathbf{q} + r$$

Pour un fluide sans viscosité et un écoulement adiabatique:

$$\boxed{\frac{Ds}{Dt} = 0}$$

- Si un gaz est considéré comme parfait:

$$p = \rho \cdot r \cdot T$$

  - Constante universelle des gaz $R = k \cdot N_A = 8.314\, J/(mol.K)$
  - Masse molaire $\mathcal{M}\left[kg \cdot mol^{-1}\right]$
  - Constante spécifique du gaz $r = \dfrac{R}{\mathcal{M}}\left[J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}\right]$

- Pour un fluide quelconque:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha_T\, dp - \beta_p\, dT \qquad \alpha_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \qquad \beta_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = (\alpha_T \cdot p)\frac{dp}{p} - (\beta_p \cdot T)\frac{dT}{T}$$

Coefficient	Name	Air	Eau
$\alpha_T \cdot p_0$	Compressibilité isotherme	1	4.6×10^{-5}
$\beta_p \cdot T_0$	Dilatation thermique	1	0.061

- Avec $e = e(\rho, T)$ la variation d'énergie interne s'écrit :

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_T d\rho + \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\rho dT$$

- Comme pour un gaz parfait $e = e(T)$ et avec la définition de la chaleur spécifique c_v

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_T = 0 \qquad\qquad \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_\rho = c_v$$

- Ainsi

$$e = \int c_v(T)dT \ + \ const$$

- Si c_v est constant sur la plage de température concernée

$$\boxed{e = c_v T \ + \ const}$$

- Avec $h = h(p,T)$ la variation d'enthalpie s'écrit :

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT$$

- Pour un gaz parfait $h = h(T)$ et avec la définition de la chaleur spécifique c_p

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = 0 \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = c_p$$

- Ainsi

$$h = \int c_p(T)dT \; + \; const$$

- Si c_p est constant sur la plage de température concernée

$$\boxed{h = c_p T \; + \; const}$$

- Avec $h = h(p,T)$ la variation d'enthalpie s'écrit :

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT$$

- Pour un fluide quelconque, à partir de la relation de réciprocité

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho}\left(1 - \beta_p \cdot T\right) \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = c_p$$

- Ainsi

$$\boxed{dh = c_p dT + \frac{1}{\rho}\left(1 - \beta_p \cdot T\right) dp}$$

- Coefficient de Joule-Thompson

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h = -\frac{1}{\rho c_p}\left(1 - \beta_p \cdot T\right)$$

- Gaz parfait au repos

$$p = p_0, \rho = \rho_0$$

- Petites perturbations $\tilde{\rho}$ et $\tilde{p}$

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho} = \rho_0 \left(1 + \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\right) = \rho_0 (1 + \varepsilon)$$

- Equations de conservation pour un gaz parfait (unidimensionnel, irrotationnel, adiabatique, transformations réversible -> isentropique)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ p = const \cdot \rho^{\gamma} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\gamma \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$p = const \cdot \rho^{\gamma} \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = const \cdot \gamma \rho^{\gamma-1}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \gamma \frac{p}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

EPFL

- Le gaz est au repos et nous considérons de petites perturbations, les effets inertiels peuvent donc être négligés:

$$\left| u \frac{\partial u}{\partial x} \right| << \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|$$

$$\rho = \rho_0 (1 + \varepsilon)$$

- En utilisant l'expression de la masse volumique et en négligeant les infiniment petits du second ordre, les équations précédentes deviennent:

$$a^2 = \gamma r T = \gamma \frac{p}{\rho}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\gamma p_0}{\rho_0} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\gamma p_0}{\rho_0} \dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t \partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

Equation de d'Alembert ou de la corde vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\left| u \frac{\partial u}{\partial x} \right| << \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|$$

- La solution de l'équation des ondes est composée d'une onde progressive et d'une onde rétrograde:

$$u = F(x - a_0 t) + G(x + a_0 t)$$

- En ne considérant que l'onde progressive, on a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F' \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F' a_0$$

- Le fait de négliger les effets inertiels revient à supposer

$$|uF'| << |F' a_0| \quad \text{soit} \quad |u| << |a_0|$$

Pour que la propagation obéisse à l'équation des ondes, il faut que la vitesse induite par la perturbation soit très inférieure à la vitesse de propagation de cette perturbation